Схемы нахождения приближенного решения для задач теории расписаний

Скиндерев Сергей Александрович [1]

студент

Московский физико-технический институт, Москва, Россия

E–mail: sergeant.mipt@mail.ru

Введение

Рассматривается NP-трудная в сильном смысле задача $R \mid prec, r_j \mid L_{\max}$. Имеется n требований $j \in N = \{1,...,n\}$, и m приборов $M_1,...,M_m$. Для каждого требования $j \in N$ даны момент освобождения r_j, длительности обслуживания $0 \le p_{ji} \le \infty$ (длительность обслуживания требования j на приборе i) и директивный срок d_j. Заданы отношения предшествования между требованиями в виде ацикличного ориентированного графа G. Каждое требование может быть обслужено только одним прибором, а каждый прибор не может одновременно обслуживать более одного требования. Необходимо найти допустимое расписание π, которое минимизирует максимальное временное смещение $L_{\max}(\pi) = \max_{j \in N} \{C_j(\pi) - d_j\}$, где $C_j(\pi)$ – время завершения обслуживания требования j в расписании π.

Идея подхода состоит в построении по исходному примеру A, такого примера B (с тем же числом требований), с минимальной оценкой абсолютной погрешности, т.е.

$$0 \le L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \rho_d(A,B) + \rho_r(A,B) + \rho_p(A,B), \text{ где}$$

$$\rho_d(A,B) = \max_{j \in N}\{d_j^A - d_j^B\} - \min_{j \in N}\{d_j^A - d_j^B\},$$

$$\rho_r(A,B) = \max_{j \in N}\{r_j^A - r_j^B\} - \min_{j \in N}\{r_j^A - r_j^B\},$$

$$\rho_d(A,B) = \sum_{j \in N}\left(\max_{i \in M}\{(p_{ji}^A - p_{ji}^B),0\} - \min_{i \in M}\{(p_{ji}^A - p_{ji}^B),0\}\right),$$

π^A, π^B – оптимальные расписания для примеров A и B соответственно.

Оценка абсолютной погрешности

Теорема 1. Пусть $A = \{G, (r_j^A, p_{ji}^A, d_j^A) \mid j \in N, i \in M\}$ и $B = \{G, (r_j^B, p_{ji}^B, d_j^B) \mid j \in N, i \in M\}$ (с одинаковыми графами предшествования G) – два примера, тогда

$$0 \le L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \rho(A,B).$$

Идея подхода состоит из двух шагов. На первом шаге у исходного примера $A = \{G, (r_j^A, p_{ji}^A, d_j^A) \mid j \in N, i \in M\}$ так изменяем параметры r_j, p_{ji} и d_j, $\forall j \in N, \forall i \in M$, что получаем пример $B = \{G, (r_j^B, p_{ji}^B, d_j^B) \mid j \in N, i \in M\}$, принадлежащий некоторому полиномиально разрешимому классу исходной задачи, который минимизирует «расстояние» $\rho(A,B)$. На втором шаге мы находим оптимальное расписание для

[1] Автор выражает признательность научному руководителю, к.ф.-м.н. Лазареву А.А. за помощь в подготовке доклада.

примера B. Согласно теореме 1, подставив расписание π^B в пример А, получим гарантированную погрешность приближенного решения $0 \le L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \rho(A,B)$.

Схемы нахождения приближенного решения

В [1] были приведены схемы нахождения приближенного решения для задачи $1 | r_j | L_{\max}$. Полиномиально разрешимые случаи можно найти в [2].

Пусть необходимо найти оптимальное расписание для примера A задачи $\alpha | \beta | L_{\max}$ и известно, что соответствующая задача $\alpha | \beta | C_{\max}$ полиномиально разрешима. Тогда $0 \le L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \rho(A,B) = \max_{j\in N} d^A_j - \min_{j\in N} d^A_j$.

Далее, пусть нужно найти оптимальное расписание для примера A задачи $\alpha | \beta | L_{\max}$ и известно, что соответствующая задача $\alpha | \beta, p_j = p | L_{\max}$ полиномиально разрешима. Тогда нужно решить оптимизационную задачу $\rho(A,B) = \sum_j \left| p_j - p \right| \to \min_p$. Решение данной задачи $p^* = p_{[\frac{n+1}{2}]}$(если $p_1 \le ... \le p_n$). В итоге получаем $L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \sum_{j\in N} | p_j - p_{[\frac{n+1}{2}]} |$. Если вместо ограничения $p_j = p$, дано $p_j = 1, \forall j \in N$, тогда абсолютная погрешность целевой функции удовлетворяет условию $L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \sum_{j\in N} | p_j - p_{[\frac{n+1}{2}]} | + 2p_{[\frac{n+1}{2}]}$.

Пусть исходная задача $R | \beta | L_{\max}$ или $Q | \beta | L_{\max}$, тогда для примера A мы рассматриваем соответствующий пример B задачи $P | \beta | L_{\max}$. Необходимо решить следующую задачу $\sum_{j\in N} \left(\max_{i\in M} \left\{ \left(p^A_{ji} - p^B_j \right), 0 \right\} - \min_{i\in M} \left\{ \left(p^A_{ji} - p^B_j \right), 0 \right\} \right) \to \min_{p^B_j}$. Решением данной задачи p^B_j является любое значение из отрезка $\left[\min_{i\in M} p^A_{ji}, \max_{i\in M} p^A_{ji} \right]$, $\forall j \in N$ и $L^A_{\max}(\pi^B) - L^A_{\max}(\pi^A) \le \sum_{j\in N} \left(\max_{i\in M} p^A_{ji} - \min_{i\in M} p^A_{ji} \right)$.

Литература

1. Лазарев А.А., Садыков Р.Р., Севастьянов С.В. (2006) Схема приближенного решения задачи $1 | r_j | L_{\max}$. Дискретный анализ и исследование операций. Январь – июнь 2006. Серия 2. Том 13. N1, 57-76.
2. http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class (основные результаты по теории расписаний).