

Диагностика хаотической динамики системы по зашумленной временной реализации.

Астахов Сергей Владимирович

аспирант

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: astakhovsv@chaos.ssu.runnet.ru

На сегодняшний день проблема анализа временных рядов весьма актуальна [1, 2]. При этом, исследуемая система не редко демонстрирует крайне сложное поведение и возникает задача определения природы таких движений – существует ли в ее фазовом пространстве хаотический аттрактор, или это зашумленные регулярные колебания. В таком случае, как правило, прибегают к анализу сигнатуры спектра характеристических показателей Ляпунова. Однако, если не известны уравнения исследуемой системы, вычисление даже одного старшего показателя Ляпунова связано с рядом сложностей. Метод, предлагаемый в данной работе дает возможность, используя временную реализацию, определить наличие хаотического аттрактора в системе, в том числе и находящейся под действием шума. Данный метод базируется на понятии относительной метрической энтропии [3].

Зависимость величины относительной метрической энтропии от характерного размера разбиения фазового пространства в случае хаотических колебаний (даже в присутствии шума) имеет важную особенность – наличие плато (что объясняется наличием перемешивания в самой динамике системы), которого нет в случае зашумленных регулярных колебаний.

В данной работе на примере осциллятора Дуффинга, находящегося под действием белого гауссова шума [4] демонстрируется возможность диагностирования возникновения хаоса при превышении величины интенсивности шумового воздействия некоторого порогового значения. Анализ спектра характеристических показателей Ляпунова подтверждает достоверность полученных результатов.

Предложенный метод может быть использован в целях реконструкции динамических систем по зашумленной временной реализации и скрытой передачи информации.

Автор выражает глубокую признательность проф. Т.Е. Вадивасовой за полезные обсуждения относительно рассмотренной проблемы.

Работа выполнена при поддержке гранта в рамках программы Министерства Образования и Науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2006-2008 годы».

Литература

1. Boettcher F., Peinke J., Kleinhans D., Friedrich R., Lind P.G., Haase M. Reconstruction of Complex Dynamical Systems Affected by Strong Measurement Noise// Phys. Rev. Lett. 2006. V. 97.
2. Verdes P.F., Granitto P.M., Navone H.D., Ceccatto H.A. Nonstationary Time-Series Analysis: Accurate Reconstruction of Driving Forces// Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87.
3. Анищенко В.С., Астахов С.В. Относительная энтропия как мера степени перемешивания зашумленных систем// Письма в ЖТФ. Т. 33. Вып. 21. С. 1.
8. Schimansky-Geier L., Herzog H. Positive Lyapunov exponents in the Kramers oscillator// J. Stat. Phys. 1993. V. 70. P.

О задаче электромагнитной дифракции в конусе

Баланцев Илья Анатольевич¹

студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: laktan86@mail.ru

Среди современных способов исследования задач электромагнитной дифракции основными являются численное моделирование и различные асимптотические методы. Однако зачастую возникает необходимость в строгом обосновании основных свойств изучаемых этими методами математических моделей. К таким свойствам следует отнести существование решения, его единственность, гладкость и другие.

Методика решения подобного рода вопросов существенно опирается на парциальные условия излучения [1], поскольку они позволяют свести задачу в неограниченной области к задаче в ограниченной области. Далее, как и при исследовании задачи дифракции в цилиндре и в свободном пространстве в [2]-[4], вводится специальное векторное функциональное пространство, в рамках которого осуществляется слабая постановка задачи, и с помощью аппарата теорем вложения проводится ее анализ. При этом как постановка парциальных условий излучений, так и доказательство теорем вложения, опирается на возможность представлять векторные поля в виде разложений по ортогональным системам функций, в качестве которых взяты функции Борнуса.

В результате проведенного исследования были доказаны некоторые теоремы вложения, и это позволило свести поставленную задачу к фредгольмово разрешимой.

Литература

1. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. – М. “Высшая школа”, 1991.
2. Делицын А.Л. О дискретном спектре оператора Лапласа в цилиндре с локально возмущенной границей. – Дифференциальные уравнения, т. 40, №2, 2004, с. 198-207.
3. Делицын А.Л. О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости. – Известия РАН, серия математическая, т. 71, №3, 2007, с. 61-112.
4. Делицын А.Л. Задача дифракции электромагнитного поля в свободном пространстве. – Дифференциальные уравнения, т. 41, №8, 2005, с. 1-7.
5. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Главные особенности электрической составляющей электромагнитного поля в областях с экранами. – Алгебра и анализ, 1993, т. 5, вып. 1, с. 143-159.
6. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях. – Алгебра и анализ, 1989, т. 1, вып. 1, с. 96-110.

¹ Автор выражает признательность профессору, д.ф.м.н. Делицыну А.Л. за предложенную тему исследования и помощь в подготовке тезисов.

Алгоритм фильтрации изображений построенный на основе курвлет-преобразования

Волохов Владимир Андреевич, Сергеев Евгений Владимирович
аспирант, аспирант

*Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова, физический факультет,
Ярославль, Россия*

E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Задача шумоподавления на сегодняшний день является одной из самых распространенных в области цифровой обработки сигналов и изображений. Шум в изображениях, как правило, возникает на этапе их перевода в цифровой вид.

Схема алгоритма фильтрации, рассматриваемая в настоящей работе, представляет собой совокупность блока искажения, в который входит только аддитивный белый гауссов шум и блока восстановления, в который входит схема прямого и обратного кодирования с преобразованием, а также блок обработки коэффициентов, полученных в результате преобразования.

Идея работы блока восстановления достаточно проста и представляет собой совокупность трех основных этапов:

- вычисление прямого преобразования изображения (вейвлет-преобразования [1], риджлет-преобразования [2], курвлет-преобразования [2] или их аналогов);
- изменение полученных коэффициентов преобразования по определенному правилу;
- вычисление соответствующего обратного преобразования от области измененных коэффициентов.

Рассмотрим более подробно основные моменты, затрагивающие работу выше указанных блоков схемы восстановления.

Во-первых, обратимся к блоку обработки коэффициентов. Его основой является использование пороговых функций различной формы [1, 2]. В настоящей работе использовались наиболее распространенные функции жесткой и мягкой пороговых оценок. Основной сложностью использования пороговых методов обработки является выбор порогового значения [1].

Во-вторых, рассмотрим блоки прямого и обратного преобразования изображения. Зачастую, в основе этих блоков лежит схема классического вейвлет-преобразования. Однако использование подобного рода схем приводит к следующим недостаткам схемы фильтрации:

- плохая аппроксимация линейных и криволинейных участков на изображении, связанная с формой базисных вейвлет-функций, изначально предназначенных для аппроксимации точечных областей на изображении;
- появление дополнительных артефактов на восстановленном изображении, обусловленных возникающим эффектом наложения спектров.

Последние проблемы могут быть решены с использованием в основе схемы преобразования курвлет-преобразования, хорошо подходящих для аппроксимации линий и кривых, соответственно, и устраняющих артефакты, указанные выше. Курвлет-преобразование, подобно вейвлет-преобразованию, является кратномасштабным преобразованием со структурными элементами, зависящими от параметров масштаба и сдвига (коэффициенты риджлет-преобразования). Исследования показывают, что данный вид преобразования дает наилучший результат для изображений с большим количеством деталей в виде кривых линий, перепадов, границ и т.п.

Литература

1. Mallat S. A wavelet tour of signal processing. Academic Press. 1999.
2. Starck J.-L., Emmanuel J., Candès E., Donoho D. The curvelet transform for image denoising // IEEE Trans. on image proc. 2002. V. 11, № 6. P. 670-684.

Теорема о тензорной свертке в произвольном псевдоримановом пространстве²

Вишвецва Полина Александровна

младший научный сотрудник

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: polina@genphys.phys.msu.ru

В современной теоретической и математической физике для описания гравитационных и электромагнитных явлений широко используются тензорные полевые функции в произвольных N -мерных пространствах. Эти функции входят в нелинейные алгебраические и дифференциальные уравнения, непосредственные преобразования которых приводят к чрезвычайно громоздким вычислениям.

Поэтому для успешного исследования математических моделей нелинейной теории поля большую роль играют алгебраические тензорные соотношения.

Теорема 1. В произвольном псевдоримановом пространстве $R_{P,N-P}^N$ с метрическим тензором g_{ik} справедливо следующее тензорное соотношение:

$$\begin{vmatrix} \psi_{i_1}^{i_1} & \psi_{i_2}^{i_1} & \dots & \psi_{i_Q}^{i_1} & \psi_{k_1}^{i_1} & \dots & \psi_{k_{N-Q}}^{i_1} \\ \psi_{i_1}^{i_2} & \psi_{i_2}^{i_2} & \dots & \psi_{i_Q}^{i_2} & \psi_{k_1}^{i_2} & \dots & \psi_{k_{N-Q}}^{i_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \psi_{i_1}^{i_Q} & \psi_{i_2}^{i_Q} & \dots & \psi_{i_Q}^{i_Q} & \psi_{k_1}^{i_Q} & \dots & \psi_{k_{N-Q}}^{i_Q} \\ \psi_{i_1}^{m_1} & \psi_{i_2}^{m_1} & \dots & \psi_{i_Q}^{m_1} & \psi_{k_1}^{m_1} & \dots & \psi_{k_{N-Q}}^{m_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \psi_{i_1}^{m_{N-Q}} & \psi_{i_2}^{m_{N-Q}} & \dots & \psi_{i_Q}^{m_{N-Q}} & \psi_{k_1}^{m_{N-Q}} & \dots & \psi_{k_{N-Q}}^{m_{N-Q}} \end{vmatrix} = Q! \begin{vmatrix} \delta_{k_1}^{m_1} & \delta_{k_2}^{m_1} & \dots & \delta_{k_{N-Q}}^{m_1} \\ \delta_{k_1}^{m_2} & \delta_{k_2}^{m_2} & \dots & \delta_{k_{N-Q}}^{m_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \delta_{k_1}^{m_{N-Q}} & \delta_{k_2}^{m_{N-Q}} & \dots & \delta_{k_{N-Q}}^{m_{N-Q}} \end{vmatrix} \cdot \det \|\psi_j^i\|, \quad (1)$$

где целое число Q заключено в пределах $0 \leq Q \leq N$, а $\det \|\psi_j^i\|$ – определитель матрицы, элементами которой являются компоненты ковариантного тензора второго ранга ψ_j^i .

Доказательство. Для доказательства соотношения (1) рассмотрим равенство:

$$E_{i_1 i_2 \dots i_Q i_{Q+1} \dots i_N} \psi_{j_1}^{i_1} \psi_{j_2}^{i_2} \dots \psi_{j_Q}^{i_Q} \psi_{k_1}^{i_{Q+1}} \dots \psi_{k_{N-Q}}^{i_N} = E_{j_1 j_2 \dots j_Q k_1 \dots k_{N-Q}} \det \|\psi_j^i\|, \quad (2)$$

где $E_{i_1 i_2 \dots i_Q i_{Q+1} \dots i_N}$ — абсолютно антисимметричный аксиальный тензор Леви-Чивиты.

Умножим равенство (2) на $E^{j_1 j_2 \dots j_Q m_1 \dots m_{N-Q}}$. В результате получим:

$$E_{i_1 i_2 \dots i_Q i_{Q+1} \dots i_N} E^{j_1 j_2 \dots j_Q m_1 \dots m_{N-Q}} \psi_{j_1}^{i_1} \psi_{j_2}^{i_2} \dots \psi_{j_Q}^{i_Q} \psi_{k_1}^{i_{Q+1}} \dots \psi_{k_{N-Q}}^{i_N} = E^{j_1 j_2 \dots j_Q m_1 \dots m_{N-Q}} E_{j_1 j_2 \dots j_Q k_1 \dots k_{N-Q}} \det \|\psi_j^i\|. \quad (3)$$

Рассмотрим произведение двух аксиальных тензоров Леви-Чивиты $E^{i_1 i_2 \dots i_N} E_{j_1 j_2 \dots j_N}$, которое может быть выражено через произведения тензоров Кронекера по формуле:

$$E^{i_1 i_2 \dots i_N} E_{j_1 j_2 \dots j_N} = (-1)^{N-P} \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \delta_{j_2}^{i_1} & \dots & \delta_{j_N}^{i_1} \\ \delta_{j_1}^{i_2} & \delta_{j_2}^{i_2} & \dots & \delta_{j_N}^{i_2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \delta_{j_1}^{i_N} & \delta_{j_2}^{i_N} & \dots & \delta_{j_N}^{i_N} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Методом математической индукции можно доказать, что свертка Q индексов у ковариантного аксиального тензора Леви-Чивиты с соответствующим числом индексов контравариантного аксиального тензора Леви-Чивиты дает:

² Тезис доклада основан на материалах исследований, проведенных в рамках гранта РФФИ (грант №08-02-01160).

$$E^{i_1 i_2 \dots i_Q i_{Q+1} \dots i_N} E_{i_1 i_2 \dots i_Q j_{Q+1} \dots j_N} = (-1)^{(N-P)} Q! \begin{vmatrix} \delta_{j_{Q+1}}^{i_{Q+1}} & \delta_{j_{Q+2}}^{i_{Q+1}} & \dots & \delta_{j_N}^{i_{Q+1}} \\ \delta_{j_{Q+1}}^{i_{Q+2}} & \delta_{j_{Q+2}}^{i_{Q+2}} & \dots & \delta_{j_N}^{i_{Q+2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{j_{Q+1}}^{i_N} & \delta_{j_{Q+2}}^{i_N} & \dots & \delta_{j_N}^{i_N} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Поэтому в выражении (3) произведение $E_{i_1 i_2 \dots i_Q i_{Q+1} \dots i_N} E^{j_1 j_2 \dots j_Q m_1 \dots m_{N-Q}}$ двух аксиальных тензоров Леви-Чивиты, преобразуем по формуле (4), а произведение $E^{j_1 j_2 \dots j_Q m_1 \dots m_{N-Q}} E_{j_1 j_2 \dots j_Q k_1 \dots k_{N-Q}}$ – по формуле (5). Сокращая в полученном выражении общий множитель и используя свойства определителей в дальнейшем преобразовании соотношение (3) дает соотношение (1). **Теорема доказана.**

В произвольном псевдоримановом пространстве $R_{P, N-P}^N$ из соотношения (1) можно получить и другие тензорные равенства. Так, например, после опускания индексов при $Q = 0$ приходим к соотношению:

$$\det \begin{vmatrix} \psi_{i_1 j_1} & \psi_{i_1 j_2} & \dots & \psi_{i_1 j_N} \\ \psi_{i_2 j_1} & \psi_{i_2 j_2} & \dots & \psi_{i_2 j_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{i_N j_1} & \psi_{i_N j_2} & \dots & \psi_{i_N j_N} \end{vmatrix} = (-1)^N Y^N \det \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} & \dots & g_{i_1 j_N} \\ g_{i_2 j_1} & g_{i_2 j_2} & \dots & g_{i_2 j_N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{i_N j_1} & g_{i_N j_2} & \dots & g_{i_N j_N} \end{vmatrix}.$$

При $Q = N - 1$ из соотношения (1) можно получить тензорное равенство

$$\psi_{lm}^{(N)} = -\frac{1}{Y^{(0)}} \sum_{s=1}^N \psi_{lm}^{(N-s)} Y^{(s)},$$

где коэффициенты $Y^{(s)}$ определяются рекуррентным уравнением:

$$Y^{(s)} = -\frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} \psi^{(s-t)} Y^{(t)}, \quad s \geq 1,$$

причем $Y^{(N)} = (-1)^N \det \|\psi_j^i\|$, а $Y^{(0)}$ – любое, не равное нулю, число.

Расчет резонансных частот аксиально-симметричных диэлектрических структур кусочно-постоянного радиуса

Ерохин Александр Игоревич

Студент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: forlector@mail.ru

При современных условиях развития технологий по созданию электродинамических резонаторов практически исчезли сложности в конструировании их элементов. Существует возможность создания электродинамических структур любых форм и размеров, диэлектриков с произвольной диэлектрической проницаемостью. Поэтому в настоящее время на передний план выходит задача предварительного математического моделирования таких систем с целью выбора их наиболее оптимальных параметров как в конструктивном плане, так и для уменьшения экономических затрат при производстве. Важной характеристикой резонаторов, определяющей технико-экономические показатели устройств, в которых они используются, является его добротность. В настоящее время ведется большое количество исследований, посвященных оптимизации электродинамических и геометрических параметров резонаторов с целью повышения их добротности.

Данная работа посвящена расчету резонансных частот аксиально-симметричных диэлектрических структур кусочно-постоянного радиуса. Подобные конструкции экспериментально исследуются на кафедре колебаний физического факультета МГУ. Предполагается, что они могут найти применение при создании проводящих систем с малыми потерями. В данной работе предложен алгоритм расчета резонансных частот таких структур, применимый для произвольного слоистого аксиально-симметричного диэлектрического заполнения. Рассмотрены случаи частичного покрытия структуры идеальным проводником.

На основе предложенного алгоритма написана компьютерная программа, с помощью которой определялся спектр резонансных частот исследуемых структур. С ее помощью обнаружен ряд интересных эффектов. Например, рассчитана открытая аксиально-симметричная структура кусочно-постоянного радиуса, принимающего всего два значения, состоящая из одиннадцати секций (рис. 1). Вычислено, что существуют частоты, на которых электромагнитное поле сосредоточено только в диэлектрике. При металлизации нескольких секций такой структуры поле может быть сосредоточено только в нескольких из них, при этом необязательно металлизированных. Этот эффект также наблюдался и при экспериментальном исследовании подобных структур.

Литература

- [1]. А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников “Математические модели электродинамики”, М.: изд-во “Высшая школа”, 1991.
- [2]. Ф. Сьярле “Метод конечных элементов для эллиптических краевых задач”, М.: изд-во “Мир”, 1980.
- [3]. Roberts J.E., Thomas J.-M. Mixed and Hybrid Methods. in: Handbook of Numerical Analysis, vol.2 ed. Ciarlet P.G., Lions J.L., North-Holland, 1991, 523-639.



Рис. 1. Разрез аксиально-симметричной структуры кусочно-постоянного радиуса, принимающего два значения, для 11 секций.

Изучение устойчивости плоского течения Куэтта на основе кинетического уравнения

Ильин Олег Вадимович

аспирант

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва, Россия

E-mail: oleg_ilyin82@mail.ru

Рассматривается вопрос устойчивости распространения газа между двумя параллельными пластинами, движущимися с одинаковыми по модулю скоростями в противоположных направлениях (течение Куэтта). Асимптотическая устойчивость плоского течения Куэтта для несжимаемого вязкого газа в трехмерной области для уравнения Навье-Стокса в линейном приближении была доказана в [1] для любых чисел Рейнольдса. Современными работами, посвященными задаче, являются [2-3].

Однако эксперименты показывают, что течение становится турбулентным при числах Рейнольдса в пределах 300–500 [4]. Одним из возможных путей преодоления противоречия между теорией и экспериментом является рассмотрение течения Куэтта между двумя цилиндрами при стремлении радиусов к бесконечности. При этом считая, что такая задача переходит плоскую задачу Куэтта, можно получить неустойчивость [5]. Другими возможностями является учет нелинейных эффектов или рассмотрение других подходов. В данной работе анализ осуществляется упрощенной моделью БГК [6], которая конечноразмеризуется в пространстве скоростей и координат. Следует отметить, что кинетический подход уже применялся для рассмотрения устойчивости других задач [7-8].

В качестве базиса в пространстве скоростей выбираются обобщенные полиномы Эрмита, затем оставляются лишь несколько первых из них, считающиеся наиболее значимыми, затем аналогичная процедура производится в пространстве координат, где в качестве базиса выбираются полиномы Лежандра. Такой метод носит название проекции Галеркина и является инструментом качественного рассмотрения динамических систем. Например, таким способом получается система Э.Лоренца, обладающая странным аттрактором.

Поставленная задача сводится к анализу зависимости положения нулей определителя однородной линейной системы, являющихся спектром возмущений, от числа Кнудсена. При уменьшении числа Кнудсена на положительной части вещественной оси появляются точки спектра, свидетельствующие о неустойчивости, причем они сдвигаются в сторону плюс бесконечности при уменьшении числа Кнудсена. Это свидетельствует об ускорении развития возмущений. Такой факт вполне физически вполне обоснован, так как уменьшению числа Кнудсена соответствует рост числа Рейнольдса.

Литература

1. Romanov V.A. Functional Analysis and it's Applications, 1973, 7, 137-146.
2. Кадченко С. И.// Решение проблемы устойчивости плоского течения Куэтта.// Вестник МАГУ, 2003, 4, 80-99.
3. Скороходов С. Л. Численный анализ спектра задачи Орра-Зоммерфельда.// ЖВМ и МФ, 2007, Т.47, 10, 1672-1692.
4. Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В. Возникновение турбулентности в пристенных течениях. Новосибирск. "Наука", 1999.
5. Sone Y., Doi T., in Proc. of 24th Intern. Symp. on RGD, New York, 258-263, 2005.
6. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Москва. "Наука", 1967.
7. Аристов В.В. Решения уравнения Больцмана при малых числах Кнудсена.// ЖВМ и МФ, 2004, Т.44, 6, 1127-1140.
8. Ильин О.В. Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана.// ЖВМ и МФ, 2007, Т.47, 12, 2082-2093.

Численное исследование динамических уравнений для полярона

Музафаров Дилиод Зикриёходжаевич
стипендиат

Объединенный Институт Ядерных Исследований
Лаборатория Информационных Технологий, г. Дубна, Россия
muzafarov@jinr.ru

Изучение динамики полярона представляет большой интерес для понимания механизмов переноса заряда и энергии в различных физических, химических и биологических структурах. Модель эволюции произвольного начального состояния квантово-механической системы в однородной среде описывается системой связанных квантово-классических динамических уравнений. Стационарные решения этой системы определяются нелинейным уравнением Шрёдингера.

Поскольку проведение натуральных экспериментов в этой области сопряжено с большими трудностями, а в некоторых случаях технически просто невозможно, особенно важную роль приобретает проведение вычислительных экспериментов. В настоящей работе исследуются численные схемы, разработанные для изучения эволюции полярона в однородной среде.

В работе [1] предложена система нелинейных уравнений для описания эволюции полярона. В частном случае, при учете сферической симметрии и для неподвижного полярона, с учетом трения эта система записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \left[i2\bar{m} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\bar{m} \frac{\varphi}{x} \right] \psi = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \Theta, \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega^2 \right] \Theta = -\frac{\omega^2}{\tilde{\varepsilon}} \frac{|\psi|^2}{x}, \end{cases} \quad (1)$$

где ψ – волновая функция, φ – потенциал, \bar{m} , γ , ω , $\tilde{\varepsilon}$ – безразмерные коэффициенты системы. Система (1) дополняется следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi_0(x, t) \Big|_{t=0} &= \psi_n (\cos \lambda_n \tau + i \sin \lambda_n \tau), \\ \Theta(x, t) \Big|_{t=0} &= -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{\psi_n^2}{x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \Theta(x, t) \Big|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0.$$

Здесь λ_n и ψ_n собственные значения, и собственные функции соответствующей стационарной задачи [2].

Для решения системы (1)-(2) будем использовать следующую неявную конечно-разностную схему порядка аппроксимации $O(h_t + h_x^2)$:

$$\begin{cases}
\frac{\psi_m^{n+1} - \psi_m^n}{h_t} = i \left\{ \sigma \left[\frac{\psi_{m+1}^{n+1} - 2\psi_m^{n+1} + \psi_{m-1}^{n+1}}{2mh_x^2} + \varphi_m^{n+1} \psi_m^{n+1} \right] + \right. \\
\left. + (1 - \sigma) \left[\frac{\psi_{m+1}^n - 2\psi_m^n + \psi_{m-1}^n}{2mh_x^2} + \varphi_m^n \psi_m^n \right] \right\} \\
\frac{\varphi_{m+1}^{n+1} - 2\varphi_m^{n+1} + \varphi_{m-1}^{n+1}}{h_x^2} = \Theta_m^{n+1} \\
\frac{\Theta_m^{n+1} - 2\Theta_m^n + \Theta_m^{n-1}}{h_t^2} + \gamma \frac{\Theta_m^{n+1} - \Theta_m^n}{h_t} + \omega^2 \Theta_m^{n+1} = -\frac{\omega^2}{\tilde{\varepsilon}} \frac{|\psi_m^n|^2}{mh_x}, \\
\psi_m^0 = \Psi(\cos \lambda \tau + i \sin \lambda \tau); \Theta_m^0 = -\frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{|\psi_m^0|^2}{mh_x}; \Theta_m^1 = \Theta_m^0; \varphi_0^n = 0; \varphi_l^n = 0, \\
m = 1, 2, \dots, l; n = 1, 2, \dots
\end{cases} \quad (3)$$

Для решения задачи (1)-(2) по схеме (3) можно использовать следующий алгоритм:

1. Решается третье уравнение при известном ψ ;
2. Решается второе уравнение для найденного Θ ;
3. Решается первое уравнение и находится ψ на следующем временном слое;
4. Повторяется весь алгоритм.

Проверка сходимости численной схемы для первого уравнения, т.е. для уравнения Шредингера, проводилась на модельной задаче с кулоновскими потенциалами. Этот подход обусловлен тем, что в этом случае для уравнения Шредингера можно написать точные аналитические решения и произвести сравнительный анализ с численными результатами. С другой стороны, физическая постановка задачи требует решать систему (1) для безразмерных значений t из интервала $0 < t < 10^5$, т.е. учет накопления ошибок с возрастанием t также играет немаловажную роль. По результатам проведенного сравнительного анализа численных и точных решений уравнения Шредингера, выбирались значения шагов сетки $h_x = 0,01$ и $h_x = 0,001$. При таком выборе шагов сетки максимальная абсолютная разность точной и численной решений не превышает значения 10^{-4} для $0 < t < 10^5$.

Проверка численной схемы (3) по приведенному алгоритму для решения системы (1) в случае, когда в качестве начального условия для первого уравнения системы выбирались решения соответствующей стационарной задачи показали, что если при $t = 0$ полярон находился в одном из состояний (нулевой или возбужденной), то до значений $t < 10^5$ он сохраняется в этом состоянии.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 06-01-00228 и № 05-01-00645-а.

Литература

- [1] Давыдов А.С., Энольский В.З. Трехмерный солитон в ионном кристалле. //ЖЭТФ, т. 81, вып. 3(9), 1981, стр. 1088-1098.
- [2] И. В. Пузынин и др. Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых методов. //ЭЧАЯ, т. 30, вып. 1, 1999, стр. 210-262.

Об эффективности одного класса апостериорных оценок

Панин Александр Анатольевич³

аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: a-panin@yandex.ru

Введение

В процессе приближённого решения задач математической физики большую роль играет оценка погрешности [1]. Одним из наиболее общих методов такой оценки для эллиптических уравнений с коэрцитивной билинейной формой является предложенный С. И. Репиным метод двойственных мажорант [2]. Целью настоящей работы являлось экспериментальное изучение эффективности метода в применении к приближённому решению краевой задачи методом конечных элементов.

Задача

В применении к задаче Дирихле для уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f, u|_{\partial\Omega} = 0$$

метод двойственных мажорант позволяет получить оценку вида

$$\|\nabla(u - v)\|^2 \leq (1 + \beta)\|\nabla v - y\|^2 + C_{\Omega}(1 + 1/\beta)\|\operatorname{div} y + f\|^2 \equiv M^2(v, \beta, y)$$

Здесь u — точное, v — приближённое решение, C_{Ω} — константа в неравенстве Пуанкаре—Фридрихса, $\beta > 0$ — произвольное число, y — произвольная функция из $H(\Omega, \operatorname{div})$. Достоинство оценки в том, что она содержит лишь одну подлежащую определению константу, применима для любой функции v , удовлетворяющей граничному условию, и достигает точного значения ошибки при минимизации по β и y . Недостаток — необходимость упомянутой минимизации.

В нашей работе были проведены 3 серии численных экспериментов для одномерного аналога уравнения Пуассона $u'' = -f$. Во всех сериях отрезок разбивался на N частичных отрезков, при этом v разыскивалось как непрерывная функция, полиномиальная на каждом отрезке разбиения. Для y использовалось более мелкое разбиение, получающееся делением каждого из N отрезков ещё на $n \geq 1$ отрезков, и y выбиралась непрерывной и полиномиальной на каждом из отрезков мелкого разбиения функцией. Степени полиномов выбирались так: I серия соответственно 1 и 1, II — 3 и 2, III — 3 и 3. Номера таблиц ниже соответствуют номерам серий. Во всех случаях функционал M^2 после дискретизации по y представлялся в виде квадратичного функционала на конечномерном евклидовом пространстве. Для минимизации этого функционала использовался метод сопряжённых градиентов.

По результатам экспериментов можно сделать следующие наблюдения.

1. Предложенный в [2] метод действительно позволяет найти гарантированную оценку ошибки сверху.
2. В случае, когда правая часть может быть *точно* приближена производной функции u , оценка практически точно приближает ошибку уже при $n=1$.
3. При усложнении вида правой части (использовались полиномы различной степени и тригонометрические функции) эффективность оценки при тех же затратах несколько уменьшается, но сходимость оценки при $n \rightarrow \infty$ к точному значению ошибки не исчезает.
4. Требование, чтобы степень y была не меньше степени конечных элементов, выбранных для v , существенно для эффективности, как показывает сравнение II серии с I и III. Исключение — случай, описанный в п. 2.

³ Автор благодарит проф., д. ф.-м. н. Боголюбова А. Н., и к. ф.-м. н. Малых М. Д. и проф., д. ф.-м. н. Яголу А. Г. за многочисленные консультации в процессе работы.

В таблицах приведены значения т. н. показателя эффективности, равного $\frac{M^2(v, \beta_{opt}, y)}{\|u'-v\|^2}$,

где функция y выбиралась вышеописанной конечномерной минимизацией, а β_{opt} находилось отдельной процедурой минимизации по β ([3], формула (48) и далее). В графах под шапкой вида $f = \dots$ указаны нормы невязки $\|u'-v\|^2$ для данной правой части. Ограниченный объём текста не позволил привести все результаты расчётов.

Таблица I.

| N | n | $f = 2$ | $I_{эфф}$ | β_{opt} | $f = x^2$ | $I_{эфф}$ | β_{opt} |
|-----|-----|------------------------|-----------|----------------------|------------------------|-----------|----------------------|
| 10 | 1 | $3,3333 \cdot 10^{-3}$ | 1,0003 | $2,66 \cdot 10^{-4}$ | $1,6574 \cdot 10^{-4}$ | 3,3129 | $8,31 \cdot 10^{-1}$ |
| | 5 | | 1,0003 | $3,19 \cdot 10^{-4}$ | | 1,3553 | $1,66 \cdot 10^{-1}$ |
| | 10 | | 1,0005 | $3,69 \cdot 10^{-4}$ | | 1,1708 | $8,29 \cdot 10^{-2}$ |
| 20 | 1 | $1,4977 \cdot 10^{-5}$ | 1,0000 | $3,37 \cdot 10^{-5}$ | $4,1609 \cdot 10^{-5}$ | 3,3176 | $8,24 \cdot 10^{-1}$ |
| | 5 | | 1,0000 | $4,47 \cdot 10^{-5}$ | | 1,3557 | $1,65 \cdot 10^{-1}$ |
| | 10 | | 1,0000 | $4,67 \cdot 10^{-5}$ | | 1,1711 | $8,24 \cdot 10^{-2}$ |

Таблица II.

| N | n | $f = x^2$ | $I_{эфф}$ | β_{opt} | $f = \sin 3\pi x$ | $I_{эфф}$ | β_{opt} |
|-----|-----|-------------------------|---------------------|----------------------|------------------------|---------------------|----------------------|
| 10 | 1 | $1,1918 \cdot 10^{-10}$ | $4,8425 \cdot 10^2$ | $9,21 \cdot 10^1$ | $7,9395 \cdot 10^{-4}$ | $5,6026 \cdot 10^2$ | $5,80 \cdot 10^1$ |
| | 5 | | 3,4914 | $8,72 \cdot 10^{-1}$ | | 3,7572 | $9,42 \cdot 10^{-1}$ |
| | 10 | | 1,4814 | 2,18 | | 1,5244 | $2,35 \cdot 10^{-1}$ |
| 20 | 1 | $1,9645 \cdot 10^{-12}$ | $1,8078 \cdot 10^3$ | $2,42 \cdot 10^2$ | $1,4977 \cdot 10^{-5}$ | $1,8390 \cdot 10^3$ | $2,01 \cdot 10^2$ |
| | 5 | | 7,2495 | 1,70 | | 7,3429 | 1,71 |
| | 10 | | 2,0253 | $4,23 \cdot 10^{-1}$ | | 2,0377 | $4,28 \cdot 10^{-1}$ |

Таблица III.

| N | n | $f = x^2$ | $I_{эфф}$ | β_{opt} | $f = \sin 3\pi x$ | $I_{эфф}$ | β_{opt} |
|-----|-----|-------------------------|-----------|----------------------|------------------------|-----------|----------------------|
| 10 | 1 | $1,1918 \cdot 10^{-10}$ | 1,0001 | $5,10 \cdot 10^{-5}$ | $7,9395 \cdot 10^{-4}$ | 7,9743 | 1,90 |
| | 5 | | 1,0001 | $5,67 \cdot 10^{-5}$ | | 1,0301 | $1,50 \cdot 10^{-2}$ |
| | 10 | | 1,0001 | $5,74 \cdot 10^{-5}$ | | 1,0037 | $1,87 \cdot 10^{-3}$ |
| 20 | 1 | $1,9645 \cdot 10^{-12}$ | 1,0000 | $6,75 \cdot 10^{-6}$ | $1,4077 \cdot 10^{-5}$ | 7,2390 | 1,71 |
| | 5 | | 1,0003 | $1,33 \cdot 10^{-5}$ | | 1,0274 | $1,36 \cdot 10^{-2}$ |
| | 10 | | 1,0002 | $8,87 \cdot 10^{-5}$ | | 1,0034 | $1,70 \cdot 10^{-3}$ |

Литература.

1. Самарский А. А. (1982) Введение в численные методы. М., Наука, 1982.
2. Репин С. И., Фролов М. Е. (2002) Об апостериорных оценках точности приближённых решений краевых задач для уравнений эллиптического типа. // ЖВМиМФ, том 42, № 12, с. 1774—1787.
3. Repin S., Sauter S., Smolianski A. (2005) Two-sided a posteriori error estimates for mixed formulations of elliptic problems. // Institut für Mathematik der Universität Zürich. Препринт 21-05. Доступен по адресу <http://www.math.unizh.ch/fileadmin/math/preprints/21-05.pdf>.

Оптическая дифракция на фрактальных решетках

Петухов Андрей Андреевич

студент

Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: andrew.pet@mail.ru

Теория фракталов активно используется в различных областях науки, в том числе и в физике. С одной стороны, построение фрактальных моделей различных явлений и систем позволяет дать их математическое описание, объяснить наблюдаемые свойства. С другой стороны, использование фрактальных распределений вместо классических позволяет выявить новые, зачастую уникальные свойства многих объектов.

К настоящему времени обнаружено большое число физических объектов, имеющих «фрактальный профиль», а также процессов, приводящих к появлению подобных объектов [1]. Фундаментальной характеристикой фрактала является его размерность [2], [3]. Эффективным методом определения фрактальной размерности объекта является метод оптического преобразования Фурье [4], основанный на изучении дифракционных картин, полученных в результате дифракции света на фрактальных решетках. Как показано в [5]-[6], при дифракции на фрактальных решетках образуется самоподобная картина, причем, анализируя распределение интенсивности на ней, можно определить фрактальную размерность решетки. Этот метод распространяется на произвольные детерминированные и случайные фракталы [7].

В процессе работы было создано программное обеспечение, моделирующее дифракцию на решетках, построенных на основе фрактала Кантора. Результаты моделирования хорошо согласуются с результатами теоретических и экспериментальных исследований, представленных в [5].

В настоящее время ведутся работы по уточнению алгоритма расчета фрактальной размерности по дифракционной картине. Кроме того, изучаются свойства плоских волноводов с фрактальным распределением диэлектрической проницаемости.

Литература

1. Потапов А.А. *Фракталы в радиофизике и радиолокации: топология выборки*. Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Университетская книга, 2005.
2. Б. Мандельброт *Фрактальная геометрия природы*. – Ижевск: РХД, 2001.
3. Яновский В. В. *Фракталы. Возникновение новой парадигмы в физике*.
4. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е., ВМУ. *Физика. Астрономия*. №2, 2008.
5. C. Allain and M. Cloitre, *Phys. Rev. B* **33**, 3566 (1986).
6. Vo Hou, Gu Xu, Weija Wen and George K. L. Wong, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 6125 (2004).
7. К. Аллен, М. Клуатр *Экспериментальное исследование двумерной агрегации//Фракталы в физике: Пер. с англ.; Под ред. Я. Г. Синая и И. М. Халатникова*. – М.: Мир, 1988. С. 395-398.

Изучение поведения спиральности на основе модели динамо Паркера и сравнение с наблюдаемыми данными

Попова Елена Петровна, Нефедов Сергей Николаевич
студент, аспирант

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Москва, Россия

E-mail: popovaelp@phys.msu.ru

Считается, что физической причиной 11-летнего цикла солнечной активности является самовозбуждение магнитного поля вследствие работы механизма гидромагнитного динамо. Этот механизм основан на совместном действии дифференциального вращения и т.н. альфа-эффекта, отражающего зеркальную асимметрию конвекции замагниченной солнечной плазмы. Мерами этой асимметрии являются т.н. гидродинамическая и магнитная спиральности. До недавнего времени астрономия не располагала прямыми наблюдениями этих величин, однако в последнее время несколькими научными группам удалось начать мониторинг по наблюдению магнитной спиральности в активных областях Солнца. В связи с этим становится актуальной задача предсказания на основе теории динамо поведения магнитной спиральности на протяжении солнечного цикла. В докладе мы решаем эту задачу в рамках известного подхода Паркера [1].

Мы провели построение баттерфляй-диаграмм для магнитной спиральности в нескольких приближениях, входящих в подход Паркера. Во-первых, мы построили эти диаграммы для случая эффективной генерации магнитного поля (больших динамо-чисел), используя соответствующее асимптотическое решение уравнений солнечного динамо, полученное в работе [2]. Далее, используя то же решение, мы выяснили, как на вид интересующих нас диаграмм влияет меридиональная циркуляция. Наконец, на основе маломодового приближения, справедливого для умеренных динамо-чисел, мы построили баттерфляй-диаграммы и в этом приближении [3].

В докладе обсуждаются, какие черты баттерфляй-диаграмм оказываются общими во всех этих приближениях. Эти устойчивые черты можно надеяться сравнить с наблюдательными данными.

Литература

1. Parker E.N. (1955) *Astrophys. J.*, 122, 293.
2. Попова Е.П., Решетняк М.Ю., Соколов Д.Д. Меридиональная циркуляция и распространение динамо-волн, *Астрономический журнал*, №1, 2008.
3. Соколов Д.Д., Нефедов С.Н. Маломодовое приближение в задаче звездного динамо, *Вычислительные методы и программирование*, 2007, 8, с. 195-204.

Исследование образования вихревого движения на поверхности проводящей жидкости в скрещенных магнитном и электрическом полях

Халин Кирилл Анатольевич

Аспирант

Ставропольский государственный университет, Ставрополь, Россия

E-mail: Halinkirill@rambler.ru

Будем рассматривать тонкий слой жидкости (рис.1). Принимаем, что магнитное поле имеет неизменную индукцию $\vec{B} = const$ внутри окружности радиуса R , на границе испытывает разрыв, а вне круга $\vec{B} = 0$.

Под действием электрического поля в жидкости идет электрический ток с плотностью, зависящей от напряженности электрического поля \vec{E} и проводимости γ : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

На жидкость со стороны магнитного поля действует горизонтальная сила с удельной плотностью $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$. Считаем, что жидкость

достаточно вязкая, поэтому инерционными свойствами жидкости можно пренебречь. Для тонкого слоя сила трения по горизонтали незначительна и главной оказывается сила трения по вертикали, а также прилипание жидкости к подложке, характерное для жидкого трения.

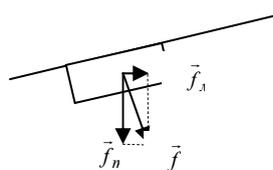


Рис. 2.

Первоначально рассматриваем состояние покоя. Равнодействующая силы тяжести и магнитной силы направлена под углом к вертикали. Соответственно, поверхность жидкости ортогональна указанной равнодействующей \vec{f}_0 и направлена под углом к горизонту (рис. 2).

При $\vec{B} = const$, в первом приближении (не учитывая динамических процессов), поверхность просто наклоняется.

Если жидкость течет, следует учесть также вязкую силу \vec{f}_a . В одномерном представлении $f_i - f_0 \sin \alpha - f_a = 0$.

Если не учитывать вязкую силу ($f_a = 0$), то $f_i = f_0 \sin \alpha$. Выразим $\sin \alpha$: $\sin \alpha = \frac{f_i}{f_0} = \frac{j \cdot B}{g \cdot \rho}$, при малых углах $\sin \alpha \approx \text{tg} \alpha \approx \alpha$, $\alpha \cong \frac{jB}{g\rho}$, где g – ускорение свободного падения, ρ – плотность жидкости. Зная $\sin \alpha$ можно найти изменение высоты под действием магнитной силы от координаты x : $\Delta h = \frac{xjB}{\rho g}$.

Для упрощения задачи используем дипольное представление при расчете течения жидкости вне области воздействия магнитного поля. Представим слой жидкости, находящийся в поле действия силы, как распределенный механический диполь. Удельный (на единицу длины) потенциал действующей силы равняется $p_L = \rho g \Delta h = jBx$ (рис. 3).

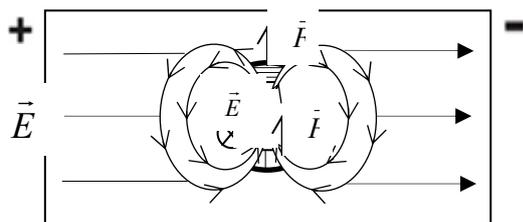


Рис. 3. Наблюдаемая система вихрей.

Исходя из этого, находим интегральный потенциал действующей магнитной силы:

$$P_L = I_L B \frac{2R^3}{3}.$$

Потенциал дипольного момента создает

силовое поле, характеризующееся удельной силой $\vec{f} = \frac{3(\bar{P}_L \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\bar{P}_L}{r^3}$. В соответствии с вышесказанным, эта сила вызывает движение жидкости, представляющее собой систему вихрей, вращающихся в противоположные стороны и имеющие общую точку в месте расположения диполя. Скорость жидкости при этом зависит от приведенной вязкости жидкости $\vec{v} = \vec{f} / \lambda$.

Теоретические оценки были подтверждены экспериментом. Во время проведения эксперимента на поверхности жидкости наблюдалось образование противоположно вращающихся вихрей, имеющих общую точку в центре кюветы. Интенсивность вихревого движения прямо зависела от силы тока, проходящего через раствор, и также зависела от концентрации раствора. При изменении направления постоянного тока направление вихрей изменялось на противоположное.

Литература

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 2003.

Расчет геометрически нелинейной плиты на упругом основании

Эрский Алексей Феликсович

аспирант

Марийский государственный технический университет, Йошкар-Ола, Россия

В данной работе предлагается методика расчета геометрически нелинейных плит на упругом основании. Известно достаточно большое количество публикаций как по расчету геометрически нелинейных плит, так и плит на упругом основании. Учет геометрической нелинейности при расчете таких плит позволяет более точно оценить напряженно-деформированное состояние при перемещениях сравнимых с ее толщиной.

Рассматриваем прямоугольную пластину, лежащую на упругом винклеровском основании с коэффициентом постели k , при действии на нее равномерно распределенной нагрузки q . Вдоль всех кромок пластина опирается на абсолютно жесткие в своей плоскости диафрагмы и гибкие из нее (рис. 1).

Решение находим исходя из уравнений равновесия и совместности деформаций для гибкой пластины [1]. Получаем систему двух нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{E\delta} \nabla^4 \Phi - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} &= 0 \\ D \nabla^4 \omega - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) &= q - k\omega \end{aligned} \right\}$$

Используя граничные условия, ищем решение уравнений в рядах. Получаем следующее уравнение для прогиба (принимая $a/b=1$):

$$\frac{f}{\delta} + \frac{128(1-\mu^2)}{3\pi^4} \frac{f^3}{\delta^3} + \frac{Bkf\pi^2}{64q} = B,$$

где $B = \frac{4qa^4}{\pi^6 D \delta}$

Уравнение позволяет провести качественный анализ решения задачи об изгибе гибкой квадратной пластины на упругом основании.

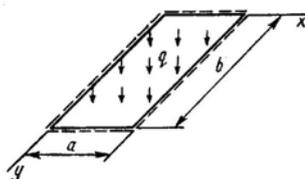


рис.1

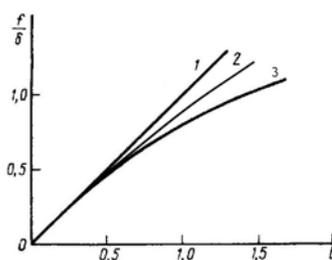


рис.2

На рис. 2 представлены графики зависимости $\frac{f}{\delta}(B)$: 1 – для жесткой; 2 – для гибкой; 3 – для гибкой на упругом основании пластины.

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д. (1990) Основы теории упругости и пластичности // Высшая школа