Секция «Математика и механика»

Мультипликаторы и делители одного весового пространства целых функций

Кузьминова Алина Витальевна
Студент
Южный федеральный университет, Факультет математики, механики и компьютерных наук, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: kuzminova.alina@rambler.ru

Рассматривается индуктивное пространство целых функций

$$H_{u,v}^{p,\infty} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N}: \ \|f\|_n = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{p_n u(|z|)+nv(|\operatorname{Im} z|)}} < \infty \right\},$$

задаваемое последовательностью $p_n u(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)\,, n \in \mathbb{N}$, нерадиальных двучленных весов. Здесь $0 < p_n \uparrow p < \infty$; $u(t)$, $v(t)$ — неотрицательные неубывающие на $[0, \infty)$ функции, растущие на бесконечности быстрее логарифма, связанные между собой соотношением $u(t) = O\big(v(t)\big)$, $t \to \infty$, и удовлетворяющие определенным техническим условиям.

Следующий результат описывает все мультипликаторы пространства $H_{u,v}^{p,\infty}$, т. е. те целые функции μ, для которых $\mu H_{u,v}^{p,\infty} \subset H_{u,v}^{p,\infty}$.

Теорема 1. *Множество всех мультипликаторов $H_{u,v}^{p,\infty}$ совпадает с*

$$M\left(H_{u,v}^{p,\infty}\right) = \left\{ \mu \in H(\mathbb{C}) \,\middle|\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}: \ \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon u(|z|)+nv(|\operatorname{Im} z|)}} < \infty \right\}.$$

В случае, когда $v(t) = t^2$, полностью охарактеризованы все делители пространства $H_{u,v}^{p,\infty}$, т. е. те мультипликаторы μ из $M\left(H_{u,v}^{p,\infty}\right)$, для которых имеет место теорема деления:$f \in H_{u,v}^{p,\infty}\,,\ \frac{f}{\mu} \in H(\mathbb{C}) \ \Rightarrow\ \frac{f}{\mu} \in H_{u,v}^{p,\infty}$.

Теорема 2. *Пусть $\mu \in M\left(H_{u,v}^{p,\infty}\right)$, $\mu \not\equiv 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*
(i) μ — делитель $H_{u,v}^{p,\infty}$
(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists r_0 > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}$ с $|x| \geq r_0\ \exists t \in \mathbb{R}$:

$$|t - x| \leq \delta v^{-1}(u(x)) \ \text{и}\ |\mu(t)| \geq e^{-\varepsilon u(t)}.$$

Для доказательства данных результатов использовались методы функционального анализа, теории субгармонических и целых функций.

История задачи восходит к работе [2], касающейся алгебры целых функций, задаваемой весами $n\ln(1 + |z|) + n|\operatorname{Im} z|$, $n \in \mathbb{N}$. В дальнейшем проблема решалась в [3] для весов вида $nu(|z|) + nv(|\operatorname{Im} z|)$ и в [1] для весов вида $p_n u(|z|) + n|\operatorname{Im} z|$, $p_n \uparrow p < \infty$.

Литература

1. Абанин А.В., Абанина Д.А. Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн., 2010. Т. 12, вып. 3. С. 3-21.

2. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division // Amer. J. Math., 1960. V. 82. P. 522-588.

3. Momm S. Closed principal ideals in nonradial Hörmander algebras // Arch. Math., 1992. V. 58. P. 47-55.