Нижние асимптотические оценки средней метрики

Куделя Виталий Викторович

Студент

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: vitaly.kudelya@gmail.com

Для $\delta \in [0,1]$ введем класс $\mathsf{F}_{2+\delta}$ функций распределения $F(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 1, \quad \beta_{2+\delta} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2+\delta} dF(x) < \infty.$$

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие общую функцию распределения $F(x) = \mathsf{P}(X_1 < x), x \in \mathsf{R}$, из $\mathsf{F}_{2+\delta}$. Обозначим

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad F_n(x) = \mathsf{P}(X_1 + \cdots + X_n < x\sqrt{n}),$$

$$\Delta_n = \Delta_n(F) = \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| dx, \quad L_n^{2+\delta} = L_n^{2+\delta}(F) = \frac{\beta_{2+\delta}}{n^{\delta/2}},$$

$$C_{\text{ан}}(\delta) = \sup_{F \in \mathsf{F}_{2+\delta}} \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}}, \quad \overline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{n\to\infty} \sup_{F \in \mathsf{F}_{2+\delta}} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}},$$

$$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) = \limsup_{l\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sup_{F \in \mathsf{F}_{2+\delta} : L_n^{2+\delta} = l} \frac{\Delta_n}{L_n^{2+\delta}}.$$

По определению, $\underline{C}_{\text{ап}} \le \overline{C}_{\text{ап}}$, $C_{\text{ан}} \le \overline{C}_{\text{ап}}$. Константы $C_{\text{ан}}$, $\overline{C}_{\text{ап}}$, $\underline{C}_{\text{ап}}$ по аналогии с терминологией, введенной в работе [2], назовем соответственно асимптотически наилучшей, верхней асимптотически правильной и нижней асимптотически правильной константами. В. М. Золотарев в [1] показал, что $C_{\text{ан}}(1) = 1/2$. И. С. Тюрин в [3] для $\delta = 1$ доказал оценку $\Delta_n \le L_n^3$, $n \ge 1$, из которой вытекает, что $\overline{C}_{\text{ап}}(1) \le 1$.

Рассматривая симметричные четырехточечные распределения, а также используя безграничную делимость пуассоновского распределения можно получить для случая $\delta \in [0; 1]$ нижние оценки констант $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$, которые приведены в следующих теоремах.

Теорема 1. *Для любого* $0 \le \delta \le 1$

$$\underline{C}_{an}(\delta) \ge \sup_{t>0,\, s>0} \frac{(\cos(ts) - 1 + \frac{s^2t^2}{2})e^{-0.5t^2}}{ts^{2+\delta}}. \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть* ξ *— случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром* $\lambda > 0$, $F_\lambda(x) = \mathsf{P}(\xi < x\sqrt{\lambda} + \lambda)$. *Тогда для всех* $0 \le \delta \le 1$

$$\overline{C}_{an}(\delta) \ge \sup_{\lambda>0} \lambda^{\delta/2} \int_{-\infty}^{\infty} |F_\lambda(x) - \Phi(x)| dx. \tag{2}$$

В нижеследующей таблице приведены значения нижних оценок для $\underline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ и $\overline{C}_{\text{ап}}(\delta)$ из теорем 1 и 2. В столбцах t, s, λ указаны экстремальные значения параметров в (1) и (2) соответственно.

δ	$\underline{C}_{\text{ап}}(\delta) \ge$	t	s	$\overline{C}_{\text{ап}}(\delta) \ge$	λ
0.0	0.3032	1.0	6.2831	0.8475	0.0133
0.1	0.2535	1.0488	5.7150	0.7053	0.0392
0.2	0.2139	1.0954	5.2382	0.6080	0.0646
0.3	0.1820	1.1401	4.8256	0.5349	0.0904
0.4	0.1561	1.1832	4.4604	0.4775	0.1167
0.5	0.1349	1.2248	4.1313	0.4314	0.1481
0.6	0.1175	1.2650	3.8321	0.3948	0.1959
0.7	0.1031	1.3038	3.5566	0.3669	0.2773
0.8	0.0912	1.3416	3.2991	0.3473	0.3915
0.9	0.0812	1.3784	3.0562	0.3335	0.5074
1.0	0.0729	1.4142	2.8254	0.3249	0.7039

Литература

1. Золотарев В. М. Об асимптотически правильных константах в уточнениях глобальной предельной теоремы. ТВП. 1964. Т. 9, № 2. С. 293–302.
2. Шевцова И. Г. Об асимптотически правильных постоянных в неравенстве Берри–Эссеена–Каца. ТВП. 2010. Т. 55, № 2. С. 271–304.
3. Tyurin I. New estimates of the convergence rate in the lyapunov theorem. 2009. `arXiv:0912.0726v1`.