

Мультииндексные фильтрации, ассоциированные с диаграммой Ньютона, и свойства их рядов Пуанкаре

Соломадин Григорий Дмитриевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия

E-mail: blastbeatscythe@gmail.com

Мультииндексная фильтрация на кольце $\mathcal{O}_{V,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}/(f)$ функций на гиперповерхности $\{f = 0\}$ использовалась в [4]. Основная идея заключалась в сопоставлении диаграмме Ньютона f фильтрации, в которой ряд Пуанкаре (см. [2]) мог бы быть посчитан, а ответ сопоставлен с соответствующей дзета-функцией монодромии. Мотивацией для этого являлись совпадение ряда Пуанкаре и дзета-функции монодромии в некоторых случаях ([1]), а также некие соотношения между ними в других (например, [3]). Одной из естественных фильтраций на кольце $\mathcal{O}_{V,0}$, соответствующей диаграмме Ньютона $\Gamma = \Gamma_f$, является дивизориальная фильтрация [7]. Она определяется дивизорами торического разрешения особенности f , соответствующими граням Γ . В первых работах, однако, она считалась неудобной для вычислений, в отличие от некоей другой [4]. Последняя определяется по диаграмме Ньютона f , и поэтому называется ассоциированной с диаграммой Ньютона. Впоследствии ситуация с двумя названными фильтрациями изменилась до противоположной. Фильтрация, признанная "упрощением", оказалась трудной для вычислений. В настоящее время известны формулы для ряда Пуанкаре данной фильтрации лишь для случая двух переменных и двуреберной диаграммы Ньютона Γ ([5]), а также ростков f , имеющих бизвездную диаграмму Ньютона Γ ([6]). Наконец, иная фильтрация была рассмотрена в [5].

Ряд Пуанкаре "первой" (хронологически определенной) фильтрации оказался лишенным инвариантности относительно гладких замен координат, сохраняющих диаграмму Ньютона Γ ([8]). Тем не менее, проделанные докладчиком компьютерные вычисления позволили предположить интересные свойства коэффициентов данного ряда Пуанкаре. В отличие от ряда Пуанкаре дивизориальной фильтрации, имеющего формулу ([6]) в терминах суммирования по диаграммам — границам (невыпуклых) множеств $\bigcup_{i=1}^s \{l_i \leq v_i\} \cap \mathbb{Z}^n$, где $\{l_i = v_i\}$ есть гиперплоскости \mathbb{R}^n , параллельные s гиперграням диаграммы Γ , казалось важным рассматривать диаграммы Λ , являющиеся границами (выпуклых) многогранников $\bigcap_{i=1}^s \{l_i \leq v_i\} \cap \mathbb{Z}^n$ (гиперграни, пересекающиеся с координатными гиперплоскостями, не включаем в определение диаграмм).

Перечислим полученные докладчиком результаты. Последнее наблюдение привело к идее введения нескольких (иных) мультииндексных фильтраций K, C кольца $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$. Данные фильтрации не индуцированы семействами функций порядка, однако дают тот же ряд Пуанкаре с точностью до знака. Основным результатом их применения является неотрицательность коэффициентов ряда Пуанкаре (при произвольной размерности n). Также получено несколько существенных продвижений в вычислении ряда Пуанкаре первой фильтрации в размерности 2 ($s \geq 2$):

- коэффициенты ряда Пуанкаре равны 0 или 1;
- диаграмма суммирования Λ , отвечающая ненулевому коэффициенту ряда Пуанкаре, может состоять только из 2 или 3 ребер, а вершины Λ (не принадлежащие координатным прямым) целочисленны;
- получены условия на расположение диаграммы Λ , отвечающей ненулевому коэффициенту ряда Пуанкаре, на плоскости \mathbb{R}^2 ;

— вычислены коэффициенты ряда Пуанкаре, отвечающие двуреберным диаграммам Λ . Для трехреберных диаграмм описан алгоритм вычисления соответствующих коэффициентов в терминах многочленов одной переменной.

Источники и литература

- 1) A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade: The Alexander polynomial of a plane curve singularity and integrals with respect to the Euler characteristic. *International Journal of Mathematics* 14, no.1, 47–54 (2003)
- 2) С. М. Гусейн-Заде, “Интегрирование по отношению к эйлеровой характеристике и его приложения”, УМН, 65:3(393) (2010), 5–42
- 3) W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade: Poincare series and zeta function of the monodromy of a quasihomogeneous singularity. *Math. Res. Lett.* 9, 509–513 (2002).
- 4) W. Ebeling, S. M. Gusein-Zade: Multi-variable Poincare series associated with Newton diagrams. *Journal of Singularities* 1, 60–68 (2010).
- 5) A. Lemahieu: Poincare series of embedded filtrations. arXiv:0906.4184. (2011)
- 6) S. M. Gusein-Zade: On a Newton filtration for functions on a curve singularity. arXiv:1206.0135 [math.AG] (2012)
- 7) S. M. Gusein-Zade: On divisorial filtrations associated with Newton diagrams. arXiv:1008.4659 [math.AG] (2010)
- 8) Г. Соломадин: Ряд Пуанкаре фильтрации, ассоциированной с диаграммой Ньютона, и топологический тип особенности. *Вестник Московского университета* 4, с. 24–28 (2015)

Слова благодарности

Докладчик признателен С.М. Гусейн-Заде за предложенную задачу и многочисленные полезные обсуждения, сделанные в ходе работы.