

**Типы слоений Лиувилля интегрируемого аналога случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  при произвольном значении постоянной площадей**

**Кибкало Владислав Александрович**

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия

*E-mail: slava.kibkalo@gmail.com*

Работа посвящена топологической классификации решений описанной ниже системы, введенной И.В. Комаровым в [5].

Рассматривается интегрируемая гамильтонова система на шестимерной алгебре Ли  $so(4)$ . В координатах  $J_1, J_2, J_3, x_1, x_2, x_3$ , в которых скобка Ли-Пуассона имеет вид  $\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk} J_k, \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk} x_k, \{x_i, x_j\} = \varkappa \varepsilon_{ijk} J_k$ , где  $\varepsilon_{ijk}$  — знак перестановки  $\{123\} \rightarrow \{ijk\}$  и  $\varkappa > 0$ , система задана гамильтонианом  $H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2c_1 x_1$  и интегралом  $K = (J_1^2 - J_2^2 - 2c_1 x_1 + \varkappa c_1^2)^2 + (2J_1 J_2 - 2c_1 x_2)^2$ , здесь  $c_1$  — произвольная постоянная. Система является гамильтоновой на четырехмерных симплектических листах  $M_{a,b} = \{(\mathbf{J}, \mathbf{x}) \mid (\mathbf{x}^2 + \varkappa \mathbf{J}^2) = a, \langle \mathbf{x}, \mathbf{J} \rangle = b\}$ . Число  $b$  называется постоянной площадей.

Целью работы является вычисление топологических инвариантов Фоменко–Цишанга, полностью описывающих структуру слоения Лиувилля на неособых трехмерных изоэнергетических поверхностях (см. книги А.В. Болсинова, А.Т. Фоменко [2]). Для классического волчка Ковалевской они были подсчитаны в статье А.В. Болсинова, П.Х. Рихтера, А.Т. Фоменко [1]. В работе И.К. Козлова [4] построены бифуркационные диаграммы отображения момента в зависимости от значения двух параметров, исследована топология в окрестности особых точек и определены перестройки торов Лиувилля. В предыдущей работе автора рассказывалось о нахождении меченых молекул в случае нулевой постоянной площадей, см. [3].

В случае её произвольного значения для нахождения инвариантов требуется выполнить следующие шаги:

- стратификация плоскости параметров
- найти все  $r$ -метки на допустимых кривых
- определить все матрицы склейки

Сформулируем результаты, достигнутые в этих направлениях.

С применением компьютерного моделирования плоскость параметров разделена кривыми на области, в которых диаграмма имеет постоянные наборы изоэнергетических поверхностей. Полное аналитическое доказательство отсутствия иных разделяющих кривых или точек пересечения пока не завершено.

При всех значениях параметров найдены  $r$ -метки допустимых кривых, причем исследованы круговые молекулы вырожденных особых точек, найденные в работах предыдущих авторов.

В сравнении с классическим случаем, на бифуркационной диаграмме появились новые кривые и соответствующие им "новые" метки. В работе найден ряд соотношений между этими метками, позволяющих ограничиться детальным исследованием перестроек вблизи лишь одной особой точки диаграммы для нахождения всех прежде неизвестных матриц склейки на допустимых кривых, соединяющих ребра камер бифуркационной диаграммы. После нахождения меченых молекул изоэнергетических поверхностей сравним их с найденными ранее в [6, 7] для установления лиувиллевой эквивалентности систем на некоторых уровнях энергии.

Для проверки получаемых результатов интересно определить топологический тип изоэнергетических поверхностей явно, независимо от найденных ранее меченых молекул. Будет рассказано о промежуточных результатах по адаптации к нашей системе идеи рассмотрения проекции изоэнергетической поверхности на сферу Пуассона и возникающих проблемах.

#### Источники и литература

- 1) Болсинов А.В., Рихтер П.Х., Фоменко А.Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской. // Матем. сб. 2000. 191, №2. 3–42.
- 2) Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2 Ижевск: Издат. дом “Удмурт. ун-т”, 1999.
- 3) Кибкало В.А. Тонкий лиувиллев анализ интегрируемого аналога случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$  при нулевой постоянной площадей. Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна–2016"/ Под ред. В.А. Костина. Воронеж: Изд-полигр центр "Научная книга 2016. С. 187–189.
- 4) Козлов И.К. Топология слоения Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли  $so(4)$ . // Матем. сб. 2014. 205, No. 4. С. 79–120.
- 5) Комаров И.В. Базис Ковалевской для атома водорода. // ТМФ 1981. 47 No. 1. 67–72.
- 6) Морозов П.В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа. // Матем. сб. 2004. 195, No. 3. С. 69–114.
- 7) Славина Н.С. Топологическая классификация систем типа Ковалевской-Яхьи. // Матем. сб. 2014. 205, No. 1. С. 105–160.

#### Слова благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя академика Анатолия Тимофеевича Фоменко за постановку задачи и внимание к работе, а также Ивана Константиновича Козлова за ценные замечания и обсуждения.