

**Необходимые и достаточные условия интерпретируемости линейных порядков в арифметике Пресбургера**

**Научный руководитель – Беклемишев Лев Дмитриевич**

**Запрягаев Александр Александрович**

*Студент (специалист)*

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,  
Механико-математический факультет, Кафедра математической логики и теории  
алгоритмов, Москва, Россия  
*E-mail: rudetection@gmail.com*

*Арифметика Пресбургера*, введённая впервые в 1929 г. [4], – это полная теория натурального ряда с операцией сложения без умножения. В отличие от арифметики Пеано, она полна и разрешима.

Гипотеза А. Виссера и Й. Зутхаута [6] об определенном изоморфизме тождественной всех интерпретаций [1] арифметики Пресбургера без параметров в себя была разрешена докладчиком и Ф. Пахомовым в 2016 г. для одномерного случая [5]. При обобщении этой задачи для любого числа измерений естественно возникает задача об описании линейных порядков, интерпретируемых в стандартной модели арифметики Пресбургера  $(\mathbb{N}, +)$  в разном числе измерений. В [5] было установлено условие, ограничивающее интерпретируемые порядки в соответствии с их рангом типа Кантора-Бендиксона (так называемым  $VD^*$ -рангом, в соответствии с [3]). Однако нетрудно заметить, что подобное условие, хотя бы из соображений мощности, является необходимым, но не достаточным; элементарные же достаточные условия, такие как построение порядка на основе стандартных операций суммы и произведения, оставляют до него большой зазор.

В настоящей работе рассматриваются различные подходы к установлению полного критерия интерпретируемости линейных порядков в стандартной модели арифметики Пресбургера. Определим операцию конденсации на линейных порядках как отождествление точек, находящихся друг от друга на конечном расстоянии. В представленной здесь работе показывается феномен строгого убывания ранга порядка при переходе к сконденсированному. С помощью представления о функции мощности сечений, рассмотренной Блэкли в [1], удаётся установить условие как на исходный порядок, так и на саму конденсацию, обеспечивающее интерпретируемость большего порядка в  $(\mathbb{N}, +)$  и являющееся необходимым и достаточным. В заключение рассматриваются стратегии, позволяющие установить точное минимальное количество измерений  $m$ , требуемое для интерпретации конкретного линейного порядка в  $(\mathbb{N}, +)$ .

**Источники и литература**

- 1) Blakley, G. R. Combinatorial remarks on partitions of a multipartite number // Duke mathematical journal 31.2, 1964, P. 335-340.
- 2) Hodges, F. Model Theory // Cambridge University Press, 1999.
- 3) Khoussainov, B., Rubin, S., & Stephan, F. Automatic linear orders and trees. // ACM Transactions on Computational Logic (TOCL), 6(4), 2005, P. 675-700.
- 4) Presburger, M. "Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves. Warszawa: 1929, P. 92-101.

- 5) Zapryagaev, A., Pakhomov, F. Interpretations of Presburger Arithmetic in Itself // International Symposium on Logical Foundations of Computer Science. Springer, Cham, 2018, P. 354-367.
- 6) Zoethout, J. Interpretations in Presburger Arithmetic / Bachelor Thesis under the supervision of Albert Visser // Department of Philosophy, Utrecht University, 2015.